spécialité

# MATHS

*Méthode simple et efficace d'apprentissage*

Tle

- Questions-réponses
- Exercices et corrigés
- Cartes mentales
- Flashcards à découper
- Formulaires

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

ellipses

1

# TECHNIQUES DE DÉMONSTRATION

## LES 10 QUESTIONS

1 Qu'est-ce qu'une démonstration par déduction ?

↳ ..................................................................................................................

..................................................................................................................

2 Peut-on démontrer une proposition à l'aide d'un exemple ?

↳ ..................................................................................................................

..................................................................................................................

3 Peut-on démontrer qu'une proposition est fausse à l'aide d'un contre-exemple ?

↳ ..................................................................................................................

..................................................................................................................

4 Qu'est-ce qu'une démonstration par disjonction des cas ?

↳ ..................................................................................................................

..................................................................................................................

5 Qu'est-ce qu'une démonstration par contraposée ?

↳ ..................................................................................................................

..................................................................................................................

6 Qu'est-ce qu'une démonstration par l'absurde ?

↳ ..................................................................................................................

..................................................................................................................

7 À quoi sert une démonstration par récurrence ?

↳ ........................................................................................................

........................................................................................................

8 Quelles sont les étapes d'une démonstration par récurrence ?

↳ ........................................................................................................

........................................................................................................

9 Pourquoi la première étape d'une démonstration par récurrence est indispensable ?

↳ ........................................................................................................

........................................................................................................

10 Que doit-on faire pour bien rédiger une démonstration par récurrence ?

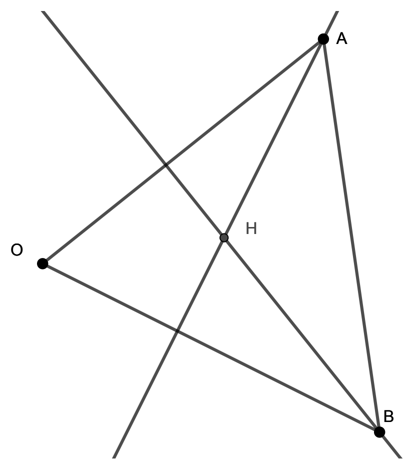
↳ ........................................................................................................

........................................................................................................

## ÉNONCÉS DES EXERCICES

### EXERCICE 1 Démonstration par déduction en géométrie

Dans la figure ci-dessous, les droites ($AH$) et ($BH$) ci-contre sont respectivement perpendiculaires aux droites ($OB$) et ($OA$).



1. Que représente le point $H$ pour le triangle $OAB$.
2. Démontrer que les droites $(OH)$ et $(AB)$ sont perpendiculaires.

## EXERCICE 2 Utilisation d'un contre-exemple

Démontrer à l'aide d'un contre-exemple que l'égalité $|a+b|=|a|+|b|$ n'est pas vérifiée pour tous réels $a$ et $b$.

## EXERCICE 3 Démonstration par disjonction des cas

Démontrer que pour entier naturel $n$ le produit $N=n(2n+1)(7n+1)$ est divisible par 3.

## EXERCICE 4 Démonstration par contraposée

Soit $n$ un entier naturel tel que $n^2$ soit pair.

Démontrer en utilisant un raisonnement par contraposée que $n$ est également pair.

## EXERCICE 5 Démonstration par l'absurde

Démontrer par l'absurde que $\frac{1}{9}$ n'est pas un nombre décimal.

## EXERCICE 6 Démonstrations par récurrence appliquées à des divisibilités

Démontrer les propriétés suivantes pour tout entier naturel $n$ :

1. $10^n-1$ divisible par 9.
2. $3^{2n}-2^n$ est divisible par 7.

## EXERCICE 7 Démonstration par récurrence appliquées aux inéquations

Démontrer les inégalités suivantes :

1. Pour tout entier naturel $n$ non nul : $2^n>n$.
2. Pour tout entier naturel strictement supérieur à 5 : $2^n>n^2$.

## EXERCICE 8 Démonstration par récurrence appliquées à des sommes

Démontrer les formules suivantes pour tout entier naturel $n$ non nul :

1. $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} p^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

## CORRIGÉS DES QUESTIONS

**1** Qu'est-ce qu'une démonstration par déduction ?

+ Dans une démonstration par déduction, on construit un raisonnement logique qui conduit à la conclusion voulue.

**2** Peut-on démontrer une proposition à l'aide d'un exemple ?

+ On ne peut pas démontrer une proposition à l'aide d'un exemple. Quand une proposition est vraie, elle doit être vérifiée dans tous les cas possibles et non pas sur un seul exemple.

**3** Peut-on démontrer qu'une proposition est fausse à l'aide d'un contre-exemple ?

+ On peut utiliser un contre-exemple pour montrer qu'une proposition est fausse car cela montre que la proposition n'est pas toujours vérifiée.

**4** Qu'est-ce qu'une démonstration par disjonction des cas ?

+ Ce type de démonstration consiste à décomposer la proposition à démontrer en un nombre fini de cas que l'on analyse séparément.

**5** Qu'est-ce qu'une démonstration par contraposée ?

+ Si $P$ et $Q$ sont des propriétés, démontrer par contraposée que $P$ implique $Q$ consiste à démontrer que (non $Q$) implique (non $P$).

**6** Qu'est-ce qu'une démonstration par l'absurde ?

+ Dans une démonstration par l'absurde, on suppose vraie le contraire de la proposition à démontrer et on montre que cela aboutit à une absurdité.

**7** À quoi sert une démonstration par récurrence ?

- Une démonstration par récurrence permet de démontrer qu'une propriété est vérifiée pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à un entier naturel $n_0$.

**8** Quelles sont les étapes d'une démonstration par récurrence ?

- Dans une démonstration par récurrence, il y a deux étapes :
- Initialisation : On vérifie la propriété pour la première valeur possible de l'entier naturel $n$.
- L'Hérédité : On suppose qu'il existe un entier naturel $n$ telle que la propriété soit vérifiée et on démontre que cette propriété est vérifiée pour $n+1$.

**9** Pourquoi la première étape d'une démonstration par récurrence est indispensable ?

- L'initialisation est indispensable car cela montre que la proposition est vérifiée au moins une fois et que la supposition en début de la démonstration d'hérédité est justifiée.

**10** Que doit-on faire pour bien rédiger une démonstration par récurrence ?

- Il faut bien séparer les deux parties (initialisation et hérédité). Pour démarrer la seconde partie (hérédité), il faut bien dire « soit $n$ appartenant à $\mathbb{N}$ tel que… »
  Enfin en fin de démonstration, écrire une phrase de conclusion du type « La propriété est vérifiée pour $n+1$ si elle l'est pour $n$, étant vraie pour $n_0$, elle l'est donc pour entier supérieur ou égal à $n_0$ ».

# CORRIGÉS DES EXERCICES

## EXERCICE 1 Démonstration par déduction en géométrie

1. Dans le triangle $OAB$, $(AH)$ est la hauteur issue de $A$ car $(AH)$ est perpendiculaire à $(OB)$.

   Dans ce même triangle $(BH)$ est la hauteur issue de $B$ car $(BH)$ est perpendiculaire à $(OA)$.

   Le point $H$ est l'intersection de 2 hauteurs du triangle $OAB$, $H$ est donc l'orthocentre de ce triangle.

2. $H$ étant l'orthocentre du triangle, il est donc situé sur la troisième hauteur du triangle c'est-à-dire la hauteur issue de $O$.

   On a donc $(OH)$ perpendiculaire à $(AB)$.

## EXERCICE 2 Utilisation d'un contre-exemple

Si on choisit $a = 5$ et $b = -4$, on aura $a + b = 1$.

Ainsi $|a| = 5$, $|b| = 4$ et $|a + b| = 1$.

L'égalité $|a + b| = |a| + |b|$ n'est pas vérifiée pour cet exemple, elle n'est pas toujours vérifiée pour tous réels $a$ et $b$.

## EXERCICE 3 Démonstration par disjonction des cas

Dans la division euclidienne d'un entier naturel $n$ par 3, il y a trois restes possibles : 0, 1 et 2. Il y a donc trois expressions possibles pour un entier naturel $n$ : $n = 3k$ ; $n = 3k + 1$ ou $n = 3k + 2$ avec $k$ entier naturel.

1er cas : $n = 3k$.

On aura : $N = n(2n+1)(7n+1) = 3k(6k+1)(21k+1) = 3\big(k(6k+1)(21k+1)\big)$.

Dans ce cas $N$ est bien divisible par 3.

2e cas : $n = 3k + 1$.

On aura : $N = n(2n+1)(7n+1) = (3k+1)(6k+2+1)(21k+7+1)$.

Ainsi $N = (3k+1)(6k+3)(21k+8) = 3\big((3k+1)(2k+1)(21k+8)\big)$.

Dans ce cas $N$ est bien divisible par 3.

3e cas : $n = 3k + 2$.

On aura : $N = n(2n+1)(7n+1) = (3k+2)(6k+4+1)(21k+14+1)$.

Ainsi $N = (3k+2)(6k+5)(21k+15) = 3\big((3k+2)(6k+5)(7k+5)\big)$.

Dans ce cas $N$ est bien divisible par 3.

$N$ est divisible par 3 dans tous les cas possibles, $N$ est donc divisible par 3 pour tout entier naturel $n$.

## EXERCICE 4 Démonstration par contraposée

La contraposée de « $n^2$ est pair donc $n$ est pair » est : « $n$ est impair donc $n^2$ est impair ».

Démonstration de cette contraposée :

Si $n$ est impair, il existe un entier naturel $k$ tel que $n = 2k + 1$.

Ainsi $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2) + 1$.

$n^2$ s'écrit sous la forme $2K + 1$ avec $K$ entier, $n^2$ est donc impair.

La contraposée est vérifiée, donc la proposition « $n^2$ est pair donc $n$ est pair » est donc vérifiée pour tout entier naturel $n$.

## EXERCICE 5 Démonstration par l'absurde

Supposons que $\frac{1}{9}$ est un nombre décimal, dans ce cas il existerait 2 entiers $a$ et $n$ tel que $\frac{1}{9} = \frac{a}{10^n}$, on aurait ainsi $10^n = 9a$ et $10^n$ serait multiple de 9.

Pour qu'un nombre soit divisible par 9, il faut que la somme des chiffres qui le composent soit multiple de 9. Or la somme des chiffres de $10^n$ est 1 (il y a un 1 suivie de $n$ zéros).

On aboutit à une incohérence, donc l'affirmation de départ est fausse.

$\frac{1}{9}$ n'est donc pas un nombre décimal.

## EXERCICE 6 Démonstrations par récurrence appliquées à des divisibilités

**1** Propriété à démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}$ $10^n - 1$ divisible par 9

Initialisation : vérification pour $n = 0$.

$10^0 - 1 = 0$ qui est bien multiple de 9 car $0 = 0 \times 9$.

La propriété est bien vérifiée pour $n = 0$.

Hérédité : Soit $n$ entier naturel tel que $10^n - 1$ soit divisible par 9 c'est-à-dire qu'il existe un entier $k$ tel que $10^n - 1 = 9k$.

Et montrons que $10^{n+1} - 1$ est divisible par 9 c'est-à-dire qu'il existe un entier $k'$ tel que $10^{n+1} - 1 = 9k'$.

$10^{n+1} - 1 = 10^n \times 10 - 1$, or $10^n = 9k + 1$.

Donc $10^{n+1} - 1 = 10(9k+1) - 1 = 90k + 10 - 1 = 90k + 9$.

Ainsi $10^{n+1} - 1 = 9(10k+1) = 9\,k'$.